

Gaps tra i numeri primi

Denotiamo con $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n \dots$ la successione dei numeri primi 2, 3, 5, 7, 11, ... e definiamo la funzione $d(n)$ *differenza dei primi consecutivi*:

$$d(n) = p_{n+1} - p_n$$

Il *Teorema dei numeri primi* asserisce che:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\log(x)} \sim \pi(x)$$

dove $\pi(x)$ è il numero dei primi $p \leq x$. Diciamo *gap* un intervallo massimale di interi vuoto di primi: un gap è pertanto un intervallo tra due primi consecutivi, p_n e p_{n+1} . Il Teorema dei numeri primi ci dice che *in media* l'intervallo tra due primi minori di x avrà lunghezza $\log(x)$. Possiamo avere informazioni più precise?

Introduciamo la *funzione gap* $g(n)$:

$$g(n) = d(n) - 1$$

Dalle definizioni segue che $g(n)$ è il numero degli interi (tutti composti) che formano l'intervallo compreso tra p_n e p_{n+1} , estremi esclusi. E' facile vedere che esistono intervalli vuoti di primi lunghi quanto si vuole: se n è un intero qualsiasi e si considera l'intervallo $n! + 2, n! + 3, n! + 4, \dots, n! + n$, il primo numero è divisibile per 2, il secondo per 3, l'ultimo per n . Pertanto se p_m è il primo più grande minore $n! + 2$, si ha $g(m) \geq n$.

Questo è sufficiente a provare che:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} g(n) = \infty$$

Che cosa possiamo dire riguardo al limite inferiore di $g(n)$?

Ricordiamo che si dicono *primi gemelli* due numeri primi la cui differenza è 2. Le prime coppie di numeri primi gemelli sono (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31) ... Si ritiene che esistano infiniti primi gemelli. Si noti che p_n e p_{n+1} sono primi gemelli se e solo se $g(n) = 1$. Nel 1970 il grande matematico cinese Chen riuscì a provare che per infiniti primi p , $p + 2$ è primo, oppure è il prodotto di due primi, e fin'ora questo è il miglior risultato che abbiamo.

Quindi per ora non sappiamo provare che $g(n)$ assume infinite volte il valore 1, anche se l'andamento dei dati sperimentali suggerisce fortemente la verità di questa ipotesi. Formuliamo allora la seguente *congettura*, equivalente alla congettura sulla infinità dei primi gemelli:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} g(n) = 1$$

Più in generale, che cosa sappiamo provare sui *piccoli* intervalli tra primi consecutivi?

Come conseguenza del Teorama sui numeri primi si ottiene che, se definiamo:

$$\Delta = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{d(n)}{\log p_n}$$

si ha $\Delta \leq 1$.

Nell'ultimo secolo le più grandi menti matematiche si sono sfidate nell'impresa di abbassare la limitazione di Δ .

1926 : Hardy e Littlewood provano (utilizzando la GRH [Generalized Riemann Hypotesis], tuttora non dimostrata) che $\Delta \leq 2/3$. Rankin (sempre sotto la GRH) prova che $\Delta \leq 3/5$.

1940 : Erdős dimostra *per la prima volta senza ipotesi aggiuntive* che $\Delta < 1$.

1966 : Bombieri e Davenport provano che $\Delta \leq \frac{(2+\sqrt{3})}{8} = 0,4665\dots$

1977 : Huxley mette insieme i metodi di Erdős, Hardy - Littlewood, Bombieri - Davenport ed ottiene $\Delta \leq 0.44254\dots$

1986 : Maier utilizza tutti i metodi precedenti ed una sua personale scoperta su certi intervalli di interi che possiedono una maggiore densità di primi, e dimostra che $\Delta \leq 0.2486\dots$

Pochi giorni fa c'è stato l'annuncio che Dan Goldston e Cem Yildirim hanno provato che $\Delta = 0$. Questo è un risultato straordinario ed inaspettato! Significa che dato un qualsiasi $\epsilon > 0$, il rapporto $\frac{d(n)}{\log p_n}$ assume, per infinite volte un valore minore di ϵ .

Hanno inoltre dimostrato che per infiniti n vale la diseuguaglianza:

$$d(n) < (\log p_n)^{8/9}.$$

I metodi utilizzati sono innovativi, ed aprono le porte a possibili futuri miglioramenti del risultato.