

Formule di Vieta, di Wallis e altri prodotti infiniti collegati a π

Umberto Cerruti

1 La funzione $\text{sinc}(x)$

La funzione $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ è assai nota e ha notevoli applicazioni pratiche, per esempio alla elaborazione dei segnali.

La funzione $\text{sinc}(x)$ si esprime come prodotto infinito di coseni, mediante questa bellissima identità:

$$\text{sinc}(x) = \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{8} \cdots \quad (1)$$

Come dice E. Maor in [3], la dimostrazione di questo fatto è sorprendentemente facile.

Per dimostrare la (1) ricordiamo, dalla trigonometria elementare, la formula

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \quad (2)$$

Ricordiamo inoltre il limite fondamentale

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \text{sinc}(\alpha) = 1 \quad (3)$$

Applicando più volte la (2) otteniamo

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \\ &4 \sin \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{2} = \\ &8 \sin \frac{x}{8} \cdot \cos \frac{x}{8} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{2} = \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

Dopo n iterazioni si ha

$$\sin x = 2^n \sin \frac{x}{2^n} \cdot \cos \frac{x}{2^n} \cdots \cos \frac{x}{2} \quad (4)$$

Dividendo entrambi i lati per x e riordinando, l'ultima equazione diventa

$$\operatorname{sinc}(c) = \left(\frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \right) \cdot \cos \frac{x}{2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \quad (5)$$

Se fissiamo un valore di x diverso da 0 e facciamo tendere n all'infinito, la quantità $\frac{x}{2^n} \rightarrow 0$ e quindi, per la (3), $\left(\frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \right) \rightarrow 1$. Infine otteniamo

$$\operatorname{sinc}(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} \quad (6)$$

La (6) venne scoperta da Eulero, ed il nostro primo esempio di prodotto infinito.

2 La formula di Vieta

La formula (6) vale per ogni x . Vale anche per $x = 0$ se poniamo $\frac{\sin 0}{0} = 1$, che è il valore del limite. Ricordiamo che

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad (7)$$

Poiché $-\sin^2 x = \cos^2 x - 1$ abbiamo equivalentemente $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

Ricavando $\cos x$ si ottiene $\cos x = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$, e infine

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \quad (8)$$

Calcoliamo ora la (6) per $x = \frac{\pi}{2}$. Sappiamo che $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Pertanto il primo membro della (6) è $\frac{2}{\pi}$. Il primo fattore del prodotto infinito a destra è $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. A questo punto abbiamo

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \prod_{n=3}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^n} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdots \quad (9)$$

Calcoliamo ora $\cos \frac{\pi}{8}$ utilizzando la (8)

$$\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Per calcolare $\cos \frac{\pi}{16}$ usiamo ancora (8) sostituendo $\frac{\pi}{8}$ a x e mettendo al posto di $\cos \frac{\pi}{8}$ il valore che abbiamo appena trovato.

Scopriamo così che $\cos \frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$. Iterando il procedimento troviamo la formula di Viète (1593)

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \dots \quad (10)$$

Nel corso della dimostrazione abbiamo provato che

$$2 \cos \frac{\pi}{2^{k+1}} = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}}_{k \text{ radici quadrate}} \quad (11)$$

Viene da chiedersi che cosa accadrebbe se cambiassimo leggermente il lato destro della (11), per esempio mutando qualche segno. La risposta ci è data da L. D. Servi in [5], ed è la seguente

Teorema 1 *Poniamo*

$$R(b_k, \dots, b_1) = \frac{b_k}{2} \sqrt{2 + b_{k-1} \sqrt{2 + b_{k-2} \sqrt{2 + \dots + b_2 \sqrt{2 + 2 \sin \frac{b_1 \pi}{4}}}}}$$

e

$$f(b_k, \dots, b_1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{b_k}{4} - \frac{b_k b_{k-1}}{8} - \frac{b_k b_{k-1} b_{k-2}}{16} - \dots - \frac{b_k b_{k-1} b_{k-2} \dots b_1}{2^{k+1}} \right) \pi$$

dove i b_i possono assumere i valori $-1, 0, 1$.

Allora

$$\cos(f(b_k, \dots, b_1)) = R(b_k, \dots, b_1)$$

Per esempio se $(b_4, b_3, b_2, b_1) = (1, -1, 1, -1)$ il Teorema (1) assicura che ■

$$\cos \frac{13\pi}{32} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}}}$$

3 La formula di Wallis

Wallis trovò il prodotto infinito che porta il suo nome cercando di calcolare l'area di un quarto di cerchio approssimandola con minuscoli rettangoli. Utilizzò metodi tanto elementari quanto complicati e difficili.

Oggi la formula di Wallis si dimostra in maniera non del tutto elementare ma assai semplice e chiara. Spesso è un risultato accessorio alla dimostrazione della famosa formula di Stirling, $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, che approssima il fattoriale (si veda per esempio il testo di Calcolo di F. Conti ([2])).

Vediamo allora la dimostrazione.

Si ponga

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx \quad (12)$$

Calcolando l'integrale I_m per parti si trovano facilmente queste formule ricorsive

$$I_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{\pi}{2} \quad (13)$$

$$I_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} \frac{\pi}{2} \quad (14)$$

Con un calcolo immediato si ricava

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{k=n} \frac{4k^2 - 1}{4k^2} \quad (15)$$

Se consideriamo x nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$, si ha che $0 \leq \sin x \leq 1$, e quindi $\sin^{m+1} x \leq \sin^m x$ e pertanto $I_{m+1} \leq I_m$. Conseguentemente valgono le disuguaglianze

$$1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \quad (16)$$

Pertanto se $n \rightarrow \infty$, $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \rightarrow 1$, e si ottiene la formula di Wallis

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 - 1}{4n^2} \quad (17)$$

Si arriva alla formula di Wallis anche dal celebre prodotto di Eulero per $\sin x$ (vedi mio Blog [47] [1])

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right) \quad (18)$$

Se poniamo $x = \frac{\pi}{2}$ otteniamo

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2n)^2}\right) = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n)^2 - 1}{(2n)^2}\right)$$

dalla quale segue subito la (17).

Osserviamo che, poiché $4n^2 - 1 = (2n - 1)(2n + 1)$ la formula di Wallis si può scrivere anche così

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n} \frac{2n+1}{2n} \quad (19)$$

ovvero

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{4} \frac{7}{6} \frac{9}{8} \dots \quad (20)$$

4 Vieta e Wallis insieme

Per quasi mezzo millennio le formule di Wallis e di Vieta sono state considerate due espressioni totalmente diverse della medesima quantità. Nel 1999 T. Osler ([4]), ha scoperto che in realtà sono una parte dell'altra.

Precisamente si ha, fissato un $p \geq 0$:

$$\frac{2}{\pi} = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \dots}_{p \text{ fattori}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2p+2}n^2 - 1}{2^{2p+2}n^2} \quad (21)$$

La (21) dice che per $p = 0$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{4} \frac{7}{6} \frac{9}{8} \dots$$

per $p = 1$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{4} \frac{5}{8} \frac{7}{12} \frac{9}{16} \dots$$

.....

per $p = 4$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}{2} \cdot \frac{31}{32} \frac{33}{32} \frac{63}{64} \frac{65}{64} \frac{95}{96} \frac{97}{96} \frac{127}{128} \frac{129}{128} \dots$$

All'inizio, per $p = 0$ abbiamo la formula di Wallis. Per $p \rightarrow \infty$ si ritorna alla formula di Vieta.

Per passare dal passo p al passo $p+1$ si incrementa il preesistente prodotto finito di Vieta con una espressione contenente $p + 1$ fattori (dove il k -esimo fattore è composto da k radici quadrate), e si modifica il prodotto di Wallis precedente cancellando le coppie di frazioni in modo alternato, una sì e una no.

Vediamo ora la dimostrazione.

Riscriviamo il prodotto (18) così

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right) = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n - x}{\pi n} \frac{\pi n + x}{\pi n}\right) \quad (22)$$

Ponendo $x = \frac{\theta}{2^p}$ otteniamo

$$\sin \frac{\theta}{2^p} = \frac{\theta}{2^p} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^p \pi n - \theta}{2^p \pi n} \frac{2^p \pi n + \theta}{2^p \pi n}\right) \quad (23)$$

Riscriviamo la (4)

con $n = p$ e $x = \theta$

$$\sin \theta = 2^p \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cos \frac{\theta}{2^p} \sin \frac{\theta}{2^p} \quad (24)$$

Sostituendo la (23) nella (24), semplificando e dividendo per θ si ha

$$\frac{\sin \theta}{\theta} = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cos \frac{\theta}{2^p} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^p \pi n - \theta}{2^p \pi n} \frac{2^p \pi n + \theta}{2^p \pi n}\right) \quad (25)$$

Ponendo $\theta = \frac{\pi}{2}$ nella (25)

$$\frac{2}{\pi} = \cos \frac{\pi}{2^2} \cos \frac{\pi}{2^3} \cdots \cos \frac{\pi}{2^{p+1}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^{p+1} n - 1}{2^{p+1} n} \frac{2^{p+1} n + 1}{2^{p+1} n}\right) \quad (26)$$

Se ora applichiamo direttamente la (11), la (26) diventa

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^p \underbrace{\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}}}_k \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^{p+1}n - 1}{2^{p+1}n} \frac{2^{p+1}n + 1}{2^{p+1}n} \right) \quad (27)$$

che è la nostra tesi (21).

Riferimenti bibliografici

- [1] U. CERRUTI, *In onore di π* , Blog [47], 11 Marzo 2006
- [2] F. CONTI, *Calcolo*, McGraw-Hill, 1993, pp. 344-345.
- [3] E. MAOR, *Trigonometrics Delights*, Princeton University Press, 1998.
- [4] T. J. OSLER, *The Union of Vieta's and Wallis's Products for π* , American Mathematical Monthly, Vol. 106 (1999), pp. 774-776.
- [5] L. D. SERVI, *Nested Square Roots of 2*, The American Mathematical Monthly, Vol. 110, No. 4 (2003), pp. 326-330.