

Ordinare i razionali

Gli alberi di Keplero e di Calkin - Wilf

Umberto Cerruti
Università di Torino

1 Introduzione

Nel seguito denoteremo con \mathbb{N} l'insieme dei numeri interi positivi, con \mathbb{Z} l'insieme dei numeri interi relativi, e con \mathbb{Q}^+ l'insieme dei numeri razionali positivi. Ci riferiremo sempre a \mathbb{Q}^+ parlando di numeri razionali, così come dicendo intero intenderemo un numero intero positivo.

L'insieme \mathbb{Q}^+ è un insieme numerabile, di cardinalità \aleph_0 (si veda, per esempio, il mio Blog Infiniti).

Pertanto \mathbb{Q}^+ può essere messo in corrispondenza biunivoca con \mathbb{N} . I razionali possono essere *elencati*. Diremo *ordinamento* dei razionali una biezione tra \mathbb{N} e \mathbb{Q}^+ .

Scopo di questo lavoro è trattare di alcuni interessanti ordinamenti (per una panoramica generale sull'argomento si veda [3]).

Verranno proposti esercizi e problemi, per chi non si accontenta di leggere e desidera intervenire attivamente.

2 L'ordinamento canonico

Pensare di mettere in fila i numeri razionali può far girare la testa. Da dove iniziare? Sembrano *troppi*, anche se sappiamo, a livello teorico, che sono tanti quanti gli interi.

Se ci limitiamo però all'insieme A , dei razionali minori o uguali a 1, un'idea viene abbastanza facilmente. Infatti in A i numeratori sono sempre minori o uguali dei denominatori, e si può pensare di elencare gli elementi di A per gruppi. Gruppi che condividono lo stesso denominatore.

Denominatore 1 \rightarrow $\{\frac{1}{1}\}$

Denominatore 2 \rightarrow $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\}$

Denominatore 3 \rightarrow $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}\}$

e così via.

Otteniamo pertanto un elenco:

$$\left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \dots \right\}$$

In questo elenco appaiono effettivamente tutti i razionali minori o uguali a 1. Ma sono ripetuti. Eliminiamo le ripetizioni, lasciando soltanto le frazioni dove il numeratore e il denominatore sono coprimi (ovvero non hanno fattori in comune diversi da 1). Otteniamo:

$$\left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \dots \right\}$$

Ora ogni elemento di A appare una e una sola volta. Dunque esiste una biezione $F : \mathbb{N} \rightarrow A$, che vogliamo determinare.

Ricordiamo che la funzione di Eulero $\phi(m)$ conta il numero degli interi positivi che precedono m e sono coprimi con m . Nell'ordinamento di A che abbiamo ottenuto gli elementi sono elencati in blocchi caratterizzati dall'avere lo stesso denominatore d . In ogni blocco ci sono esattamente $\phi(d)$ frazioni.

Dato $n \in \mathbb{N}$ l'algoritmo per calcolare $F(n)$ è il seguente. (Poniamo $F(1) = 1$)

- Sia m il massimo intero tale che $s = \phi(1) + \phi(2) + \dots + \phi(m) < n$
- Si ponga $t = n - s$
- Si scriva l'insieme $P(m+1)$ formato dai $\phi(m+1)$ interi coprimi con $m+1$.
- Sia z il t -esimo elemento di $P(m+1)$
- Si ponga $F(n)$ uguale $\frac{z}{m+1}$

Esempio 1. Quanto vale $F(100)$?

Poiché $\phi(1) + \dots + \phi(17) = 96$ e $\phi(18) = 6$, abbiamo $m = 17$ e $s = 96$. Dunque $t = n - s = 4$. Inoltre $P(18) = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$ e il suo quarto elemento è 11. Pertanto $F(100) = \frac{11}{18}$.

Esercizio 2. Scrivere l'algoritmo che calcola la funzione F^{-1} inversa della F .

Calcolare $F^{-1}\left(\frac{79}{103}\right)$.

Osserviamo ora che l'intervallo aperto B dei razionali strettamente compresi tra 0 e 1 è in corrispondenza biunivoca con \mathbb{Q}^+ attraverso la funzione θ così definita

$$\begin{cases} \theta : B \rightarrow \mathbb{Q}^+ \\ \theta : b \mapsto \frac{b}{1-b} \end{cases}$$

Possiamo allora definire il nostro primo ordinamento, che denotiamo con Ω_1 e chiamiamo *ordinamento canonico*.

$$\begin{cases} \Omega_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+ \\ \Omega_1 : n \mapsto \theta(F(n+1)) \end{cases}$$

Questi sono i primi 30 razionali dell'ordinamento Ω_1 , ovvero l'elenco $\{\Omega_1(1), \Omega_1(2), \dots, \Omega_1(30)\}$

$$\left\{ 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, \frac{1}{5}, 5, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, 6, \frac{1}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}, 7, \frac{1}{8}, \frac{2}{7}, \frac{4}{5}, \frac{5}{4}, \frac{7}{2}, 8, \frac{1}{9}, \frac{3}{7}, \frac{7}{3} \right\}$$

Esempio 3. Qual è il razionale $\Omega_1(100)$?

Dobbiamo prima calcolare $F(101)$ con l'algoritmo visto sopra. Otteniamo (ovviamente) $F(101) = \frac{13}{18}$. Dopo calcoliamo $\theta(\frac{13}{18}) = \frac{13/18}{1-13/18}$. Otteniamo così $\Omega_1(100) = \frac{13}{5}$.

Esercizio 4. Scrivere l'algoritmo che calcola la funzione Ω_1^{-1} inversa di Ω_1 .

Calcolare $\Omega_1^{-1}(\frac{903}{55})$.

Si può tentare un altro approccio. In fondo i numeri razionali sono coppie di interi. Possiamo tentare di elencare le coppie di interi...

Consideriamo la matrice infinita formata dalle coppie di interi (m, n) . L'angolo superiore sinistro 4×4 è

$$\begin{array}{cccc} (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & (1, 4) \\ (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & (2, 4) \\ (3, 1) & (3, 2) & (3, 3) & (3, 4) \\ (4, 1) & (4, 2) & (4, 3) & (4, 4) \end{array}$$

Contiamo ora per diagonali (metodo reso famoso da Cantor): dall'alto in basso, da destra a sinistra, tornando ogni volta che si tocca la prima colonna alla prima riga, un passo più a destra.

Questo metodo genera un ordinamento delle coppie di interi. L'ordinamento inizia con

$$\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), \dots\}$$

Abbiamo così creato una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle coppie (l'insieme prodotto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$) e l'insieme \mathbb{N}

Nella seguente matrice 10×10 si vede una parte della numerazione delle coppie ottenuta.

1	2	4	7	11	16	22	29	37	46
3	5	8	12	17	23	30	38	47	57
6	9	13	18	24	31	39	48	58	69
10	14	19	25	32	40	49	59	70	82
15	20	26	33	41	50	60	71	83	96
21	27	34	42	51	61	72	84	97	111
28	35	43	52	62	73	85	98	112	127
36	44	53	63	74	86	99	113	128	144
45	54	64	75	87	100	114	129	145	162
55	65	76	88	101	115	130	146	163	181

Per esempio la coppia $(4, 1)$ viene mappata in 10.

E' facile scrivere la funzione g che manda la coppia (n, m) nella sua posizione. Si capisce subito, dalla costruzione stessa, che la prima colonna della matrice è formata dai numeri triangolari T_n

$$T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$$

Sappiamo che $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$. La coppia (n, m) , nel processo di conteggio, appartiene alla diagonale discendente che parte da $(1, n + m - 1)$ e finisce nella prima colonna al posto

$(n + m - 1, 1)$. Per quanto detto $g((n + m - 1, 1)) = T_{n+m-1}$. Dobbiamo ora tornare indietro di $m - 1$ passi risalendo verso destra. Pertanto

$$g((n, m)) = T_{n+m-1} - (m - 1) = \frac{(n + m - 1)(n + m)}{2} - m + 1 = \frac{(n + m - 1)(n + m - 2)}{2} + n$$

Per esempio $g((10, 8)) = \frac{17 \times 16}{2} + 10 = 146$.

La funzione g è una biezione e quindi possiede una inversa g^{-1} . E' interessante calcolarla.

Esercizio 5. Scrivere un algoritmo che calcola g^{-1} .

Questi sono i primi 48 valori di $g^{-1}(k)$ ($1 \leq k \leq 48$)

(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (1, 5), (2, 4),
 (3, 3), (4, 2), (5, 1), (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1), (1, 7), (2, 6), (3, 5),
 (4, 4), (5, 3), (6, 2), (7, 1), (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1),
 (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (7, 3), (8, 2), (9, 1), (1, 10), (2, 9), (3, 8)

Trasformiamo ora le coppie (n, m) nei razionali $\frac{n}{m}$. Otteniamo

$$\left\{ 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, 1, 2, 5, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, 6, \frac{1}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \right. \\ \left. 1, \frac{5}{3}, 3, 7, \frac{1}{8}, \frac{2}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{5}{4}, 2, \frac{7}{2}, 8, \frac{1}{9}, \frac{1}{4}, \frac{3}{7}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, \frac{7}{3}, 4, 9, \frac{1}{10}, \frac{2}{9}, \frac{3}{8} \right\}$$

Eliminiamo i razionali duplicati dalla lista

$$\left\{ 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, \frac{1}{5}, 5, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, 6, \frac{1}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}, 7, \frac{1}{8}, \frac{2}{7}, \frac{4}{5}, \frac{5}{4}, \frac{7}{2}, 8, \frac{1}{9}, \frac{3}{7}, \frac{7}{3}, 9, \frac{1}{10}, \frac{2}{9}, \frac{3}{8} \right\}$$

In questo modo abbiamo costruito un ordinamento dei razionali, che denotiamo con Ω'_1 . Riassumiamo il calcolo di Ω'_1

1. Costruiamo l'elenco per diagonali delle coppie (n, m)
2. Trasformiamo le coppie in razionali $\frac{n}{m}$
3. Eliminiamiamo i duplicati

Sembra che per ogni k si abbia $\Omega_1(k) = \Omega'_1(k)$. Ovvero sembra che abbiamo nuovamente trovato l'ordinamento canonico!

Problema 6.

- Quanti sono i duplicati quando trasformiamo le coppie in razionali?
- Dimostrare che $\Omega_1 = \Omega'_1$.

Problema 7. Trovare altri ordinamenti delle coppie (n, m) , e da questi dedurre nuovi ordinamenti dei razionali.

Diversi ordinamenti sono già noti (si veda [3] e la relativa bibliografia).

3 Un ordinamento basato sul Teorema Fondamentale dell'Aritmetica

In [5] si parte da una biezione β tra \mathbb{N} e \mathbb{Z} così definita

$$\begin{cases} \beta(2k) = -k \\ \beta(2k-1) = k \end{cases}$$

Data β è facile indurre una corrispondenza biunivoca Ω_2 tra \mathbb{N} e \mathbb{Q}^+ .

Prendiamo $n \in \mathbb{N}$. L'intero n si fattorizza in modo unico

$$n = \prod p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$$

Definiamo allora

$$\Omega_2(n) = \prod p_1^{\beta(e_1)} p_2^{\beta(e_2)} \cdots p_k^{\beta(e_k)} \quad (1)$$

Il numeratore di $\Omega_2(n)$ sarà composto dai primi che appaiono con esponente dispari nella fattorizzazione di n , mentre al denominatore ci saranno i primi che appaiono con esponente pari.

Per esempio se $n = 66395120 = 2^4 \times 5 \times 11^2 \times 19^3$ allora avremo $\Omega_2(n) = 2^{-2} \times 5 \times 11^{-1} \times 19^2 = \frac{1805}{44}$.

Questi sono i primi 30 elementi dell'ordinamento Ω_2

$$\left\{ 1, 2, 3, \frac{1}{2}, 5, 6, 7, 4, \frac{1}{3}, 10, 11, \frac{3}{2}, 13, 14, 15, \frac{1}{4}, 17, \frac{2}{3}, 19, \frac{5}{2}, 21, 22, 23, 12, \frac{1}{5}, 26, 9, \frac{7}{2}, 29, 30 \right\}$$

Esercizio 8. Scrivere l'algoritmo che calcola Ω_2^{-1} .

Determinare $\Omega_2^{-1}\left(\frac{79}{103}\right)$.

Problema 9. Trovare biezioni tra \mathbb{N} e \mathbb{Z} diverse da β , e, da queste, ricavare nuovi ordinamenti dei razionali utilizzando sempre la (1).

4 Liste, frazioni continue e razionali

Ogni razionale q ha uno sviluppo in frazione continua. Esso si può ottenere assai facilmente mediante l'algoritmo di Euclide.

Facciamo un semplice esempio (copiato da una mia presentazione del 2009)).

Sia $q = \frac{116}{43}$. Applichiamo l'algoritmo di Euclide alla coppia (116,43). Al primo passo si ha

$$116 = 2 \times 43 + 30$$

Dividendo per 43 otteniamo

$$\frac{116}{43} = 2 + \frac{30}{43} = 2 + \frac{1}{\frac{43}{30}} \quad (2)$$

Al secondo passo

$$43 = 1 \times 30 + 13$$

Dividendo per 30 otteniamo

$$\frac{43}{30} = 1 + \frac{13}{30} = 1 + \frac{1}{\frac{30}{13}} \quad (3)$$

Sostituendo la (3) nella (2):

$$\frac{116}{43} = 2 + \frac{30}{43} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{30}{13}}}$$

Proseguendo fino a quando l'algoritmo di Euclide dà resto nullo

$$\frac{116}{43} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}}$$

Per semplificare la notazione, scriveremo

$$\frac{116}{43} = [2, 1, 2, 3, 4]$$

Osserviamo che ovviamente si ha anche

$$\frac{116}{43} = [2, 1, 2, 3, 3, 1]$$

Questa è l'unica ambiguità che presenta l'espressione in frazione continua di un razionale.

Per eliminare l'ambiguità decidiamo che tutti gli sviluppi devono finire con un intero > 1 .

Diciamo frazione continua razionale (brevemente fcr) un elenco finito di interi $[a_1, a_2, \dots, a_k]$ dove $a_1 \geq 0$, per $1 < j < k$ si ha che $a_j > 0$ e, infine, se $k > 1$, si ha $a_k > 1$.

Diciamo \mathcal{F} l'insieme di tutte le fcr.

Esiste quindi una corrispondenza biunivoca naturale τ tra \mathbb{Q}^+ e \mathcal{F} . Dato un razionale $\frac{a}{b}$ lo si sviluppa in frazione continua

$$\frac{a}{b} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_k}}},$$

e si pone

$$\tau\left(\frac{a}{b}\right) = [a_1, a_2, \dots, a_k]$$

Naturalmente la funzione inversa τ^{-1} di τ è quella che manda la fcr $[a_1, a_2, \dots, a_k]$ nel razionale $\frac{a}{b}$.

Diciamo lista un elenco finito di interi positivi. Sia \mathcal{L} l'insieme di tutte le liste. Come notazione, distinguiamo le liste dalle fcr delimitandole con parentesi tonde invece che quadre.

Esiste una corrispondenza biunivoca η tra \mathcal{L} e \mathcal{F} . Data una lista $s = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ si pone

$$\eta(s) = [b_1 - 1, b_2, \dots, b_{k-1}, b_k + 1]$$

Si leva 1 da b_1 perché le fcr possono iniziare con 0 e si aggiunge 1 a b_k perché le fcr terminano sempre con un intero > 1 . Si noti che se la lista contiene un solo elemento n si ha $\eta((n)) = n$.

Componendo η con τ^{-1} si crea una corrispondenza biunivoca ζ tra \mathcal{L} e \mathbb{Q}^+

$$\begin{cases} \zeta : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Q}^+ \\ \zeta : s \mapsto \tau^{-1}(\eta(s)) \end{cases} \quad (4)$$

Esempio 10. Calcoliamo $\zeta((2, 2, 3, 4, 5, 5))$.

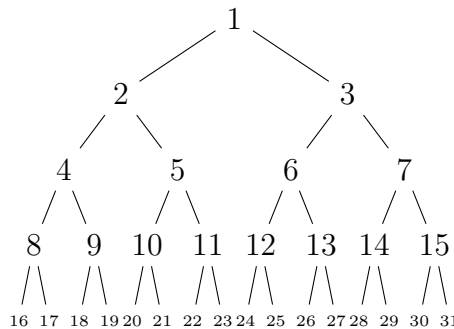
Dalle definizioni si ha che $\eta((2, 2, 3, 4, 5, 5)) = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$, e $\tau^{-1}([1, 2, 3, 4, 5, 6]) = \frac{1393}{972}$. Quindi $\zeta((2, 2, 3, 4, 5, 5)) = \frac{1393}{972}$.

Esercizio 11.

Calcolare $\zeta^{-1}(\frac{99}{17})$.

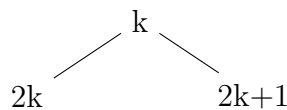
5 L'albero di Keplero con il suo ordinamento

Cominciamo con l'albero binario degli interi, che chiamiamo I .



Da ogni nodo partono due vie, che diciamo sinistra (S) e destra (D). Esse portano a due nuovi nodi, che diciamo figli.

La regola di costruzione di I è molto semplice.



Pertanto se il valore del nodo è k il valore del figlio di sinistra è $2k$ mentre al figlio di destra viene assegnato l'intero $2k + 1$.

La radice dell'albero, il numero 1, sta al livello 0. Al livello 1 abitano 2 e 3, e così via. Al livello m troviamo sempre 2^m interi.

Ogni intero ha allora un unico indirizzo della forma (livello, posizione), dove il livello m è un intero qualunque non negativo, e la posizione va da 1 a 2^m . All'indirizzo $(m, 1)$ abita 2^m , all'indirizzo $(m, 2^m)$ c'è $2^{m+1} - 1$.

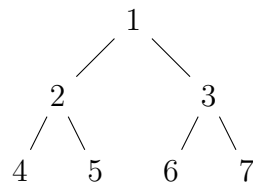
Esercizio 12.

Trovare un metodo semplice per assegnare ad ogni intero il suo indirizzo.

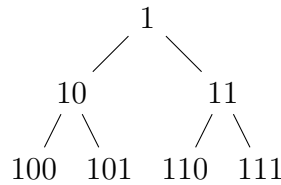
Il nostro scopo iniziale è quello di partire dall'albero I per arrivare a un albero, denotato con L , che contiene tutte le liste di interi.

Trasformiamo gli interi n di I in binario. Otteniamo un albero, detto B .

L'albero I inizia con

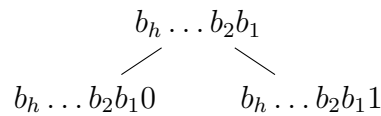


E il corrispondente albero B inizia con



Anche la regola di formazione di B è semplicissima, e si deduce immediatamente da quelle di I . Raddoppiare un intero in binario significa aggiungere uno 0 sulla destra, e aggiungere un 1 a destra fa passare proprio da n a $2n + 1$.

Visivamente i figli del nodo che contiene il numero (in binario) $b_h \dots b_2 b_1$ sono questi



Adesso vogliamo passare dalla espressione binaria di n a una lista. Supponiamo che n sia un intero di h bit. I bit sono numerati $1, 2, \dots, h$ da destra a sinistra, dal meno significativo al più significativo, si ha cioè

$$n = \sum_{j=1}^{j=h} b_j 2^{j-1}$$

Osserviamo che si ha sempre $b_h = 1$. Il numero n è completamente determinato dalla lista delle posizioni degli 1 nella espressione binaria di n . Facciamo un esempio, sia $n = 105$. In binario $n = 1101001$. I bit 1 si trovano nelle posizioni (1, 4, 6, 7). La lista (1, 4, 6, 7) determina quindi n .

Le liste che otteniamo con questo metodo non sono però liste generiche, perché sono formate da sequenze di interi strettamente crescenti. Dobbiamo dunque passare (in modo biiettivo) da una lista di posizioni a una lista generica. Questo è facile: basta pensare alle *differenze* tra le posizioni. Associamo alla lista di posizioni

$$r = (p_1, p_2, \dots, p_s) \quad \text{con} \quad p_1 < p_2 < \dots < p_s$$

la lista generica

$$g = (p_1, p_2 - p_1, p_3 - p_2, \dots, p_s - p_{s-1})$$

Ovviamente si può ritornare da g a r semplicemente calcolando la sequenza delle somme parziali di g .

Nel nostro esempio si passa da $n = 105 = 1101001$ alla lista delle posizioni $r = (1, 4, 6, 7)$ alla lista generica $g = (1, 3, 2, 1)$. Da g si ritrova r con le somme successive

$$r = (1, 1 + 3, 1 + 3 + 2, 1 + 3 + 2 + 1)$$

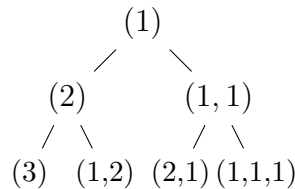
Infine abbiamo costruito una biezione $\rho : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{L}$. Dato un intero n lo si scrive in binario, si prende la lista delle posizioni degli 1, e si passa alla lista delle differenze.

Ecco i valori di $\rho(n)$ per n che va da 1 a 16.

(1), (2), (1, 1), (3), (1, 2), (2, 1), (1, 1, 1), (4), (1, 3), (2, 2), (1, 1, 2), (3, 1), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 1, 1, 1), (5)

L'albero L si ottiene dall'albero I , applicando la ρ ad ogni nodo.

Questo è l'inizio dell'albero L



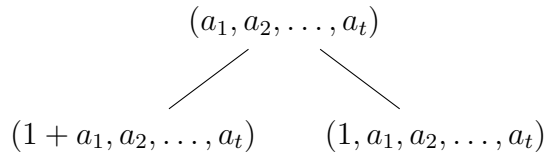
Come costruire i figli di un nodo nell'albero L ?

Il figlio di sinistra della lista $\rho(n)$ è $\rho(2n)$, e viene dalla espressione binaria di $2n$, come sappiamo. Lo 0 aggiunto a destra fa aumentare di 1 le posizioni, mentre le differenze rimangono uguali.

Pertanto $\rho(2n)$ è uguale a $\rho(n)$, tranne che il primo elemento è aumentato di 1.

Il figlio di destra della lista $\rho(n)$ è $\rho(2n + 1)$, e viene dalla espressione binaria di $2n + 1$. Il bit 1 aggiunto a destra aumenta di 1 la lunghezza di $\rho(2n + 1)$, che inizierà con 1 e per il resto sarà identica a $\rho(n)$.

Il meccanismo di formazione dell'albero L è mirabilmente semplice. La radice è la lista (1) e, dato il nodo che contiene la lista a_1, a_2, \dots, a_t i figli sono



Nell'albero L ci sono tutte le liste, appare ogni elemento di \mathcal{L} una e una sola volta. Lo scopo iniziale è stato raggiunto. Ora proseguiamo.

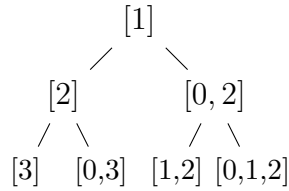
Possiamo applicare a ogni nodo di L la funzione η e ottenere un albero che contiene tutte le fcr (le espressioni in frazione continua dei razionali), ovvero l'intero insieme \mathcal{F} disposto in forma di albero binario!

Ecco i valori di $\eta(\rho(n))$ per n che va da 1 a 16.

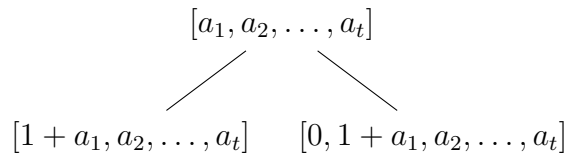
[1], [2], [0, 2], [3], [0, 3], [1, 2], [0, 1, 2], [4], [0, 4], [1, 3], [0, 1, 3], [2, 2], [0, 2, 2], [1, 1, 2], [0, 1, 1, 2], [5]

Ricordiamo che η fa un lavoro elementare sulla lista che riceve, toglie 1 al primo elemento e aggiunge 1 all'ultimo.

Chiamiamo F l'albero risultante. Ecco l'inizio di F



Il meccanismo di formazione dell'albero F è ora evidente, il figlio di sinistra di una fcr si ottiene sommando 1 al primo posto, il figlio di destra è uguale a quello di sinistra con uno 0 premesso.



L'ultimo passo è passare ai razionali, ottenere un albero con tutti i razionali e un nuovo ordinamento dei razionali.

Per far questo è sufficiente applicare τ^{-1} a ogni nodo di F . Se partiamo da I si tratta di applicare ad ogni intero n (ad ogni nodo di I) la funzione composta $\tau^{-1}(\eta(\rho(n))) = \zeta(\rho(n))$.

Ecco i primi 32 elementi

$1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, 4, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{5}, 5, \frac{1}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{3}, \frac{3}{7}, \frac{7}{4}, \frac{4}{7}, \frac{2}{7}, \frac{7}{5}, \frac{5}{7}, \frac{8}{3}, \frac{3}{8}, \frac{8}{5}, \frac{5}{8}, 6$

Abbiamo ottenuto un nuovo ordinamento, che denotiamo con Ω_3 .

La funzione $\Omega_3(n)$, per quanto detto, si calcola così

- Si scrive n in binario.
- Si determina la lista delle posizioni degli 1.
- Si passa alla lista delle differenze (a questo punto abbiamo calcolato $\rho(n)$).
- Si aggiunge e si leva 1 rispettivamente al primo e all'ultimo posto della lista delle differenze ($\eta(\rho(n))$).
- Si calcola il valore razionale della fcr ottenuta ($\tau^{-1}(\eta(\rho(n))) = \zeta(\rho(n))$).

Esempio 13.

Calcoliamo $\Omega_3(1948)$.

$$1948 \mapsto 11110011100 \mapsto (3, 4, 5, 8, 9, 10, 11) \mapsto (3, 1, 1, 3, 1, 1, 1) \mapsto (2, 1, 1, 3, 1, 1, 2) \mapsto \frac{105}{41}$$

Esercizio 14.

Invertendo il procedimento calcolare $\Omega_3^{-1}(\frac{969}{541})$.

Se applichiamo ai nodi dell'albero I degli interi la funzione biettiva $\zeta(\rho(n))$ otteniamo un albero, che indichiamo con K , che, come già osservato, contiene tutti i razionali, ognuno dei quali appare una sola volta.

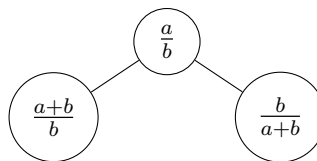
Qual è in questo albero il meccanismo di generazione? Lo otteniamo subito dal meccanismo che genera le fcr, esposto poco sopra.

Il figlio a sinistra di $[a_1, a_2, \dots, a_t]$ è $[1 + a_1, a_2, \dots, a_t]$. Dunque se $\frac{a}{b} = [a_1, a_2, \dots, a_t]$ il figlio a sinistra è $1 + \frac{a}{b} = \frac{a+b}{b}$. Il figlio a destra è $[0, 1 + a_1, a_2, \dots, a_t]$. Questa frazione continua comincia con 0 e quindi si ha che

$$[0, 1 + a_1, a_2, \dots, a_t] = \frac{1}{[1 + a_1, a_2, \dots, a_t]}$$

Pertanto il figlio destro è semplicemente l'inverso del sinistro!

Ecco il meccanismo che genera l'albero K

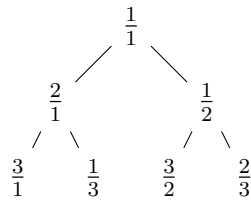


L'ordinamento Ω_3 si può mettere in forma ricorsiva. Se $n = 2k$ è pari allora $\Omega_3(2k)$ è il figlio di sinistra di $\Omega_3(k)$ e quindi $\Omega_3(2k) = \Omega_3(k) + 1$. Se $n = 2k + 1$ è dispari allora $\Omega_3(2k + 1)$ è il figlio di destra di $\Omega_3(k)$ e quindi è l'inverso di $\Omega_3(2k)$ (il figlio di sinistra).

La forma ricorsiva di Ω_3 è quindi la seguente

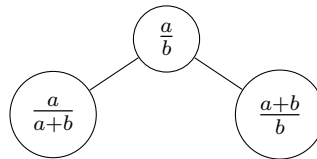
$$\begin{cases} \Omega_3(1) = 1 \\ \Omega_3(2k) = \Omega_3(k) + 1 \\ \Omega_3(2k + 1) = \frac{1}{\Omega_3(k)+1} \end{cases}$$

L'ordinamento Ω_3 è definito proprio con questa ricorsione in [8].
 Questo albero è stato introdotto da Keplero in *Harmonices Mundi* nel 1619, vedi [6].
 L'albero di Keplero inizia così



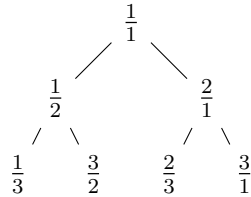
6 L'albero di Calkin - Wilf e il suo ordinamento

In [4] si parla di un albero che è in corrispondenza biunivoca con i razionali, molto interessante, il cui meccanismo generativo è questo (anche questo albero parte da $\frac{1}{1}$)



Si noti che il figlio di destra, in questo albero, è lo stesso del figlio di sinistra nell'albero di Keplero K . Malgrado questo i due alberi sono assai diversi.

L'albero di Calkin - Wilf inizia così



L'aspetto notevole è che questo albero è generato da una singola sequenza di interi $b(n)$ definita dalla ricorsione

$$\begin{cases} b(1) = 1 \\ b(2) = 1 \\ b(2k) = b(k) \\ b(2k + 1) = b(k) + b(k + 1) \end{cases}$$

I primi 32 elementi della sequenza sono

$$\{1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1, 5, 4, 7, 3, 8, 5, 7, 2, 7, 5, 8, 3, 7, 4, 5, 1\}$$

Questa è la famosa sequenza di Stern, che possiede innumerevoli proprietà, in parte illustrate nel recentissimo articolo di Sam Northshield [7].

Una delle proprietà è questa: la successione $\frac{b(n)}{b(n+1)}$ (che è quella che appare sull'albero di Calkin - Wilf) è un ordinamento dei razionali! Battezziamo Ω_4 questo ordinamento. Seguono i primi elementi di Ω_4 .

$$\left\{ 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, 3, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}, 4, \frac{1}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{7}, \frac{3}{8}, \frac{8}{5}, \frac{7}{5}, \frac{2}{7}, \frac{7}{5}, \frac{5}{8}, \frac{3}{7}, \frac{7}{4}, \frac{4}{5}, 5, \frac{1}{6} \right\}$$

Si noti che (per costruzione) il denominatore di una frazione è sempre uguale al numeratore di quella seguente!

In [4] e in [7] vengono posti questi problemi

Problema 15.

Quali altre sequenze $b(n)$ esistono tali che la successione $b(n)/b(n+1)$ è un ordinamento dei razionali? Ricordiamo che questo significa che, al variare di n , si incontrano tutti i razionali una e una sola volta.

Problema 16.

Scrivere un algoritmo che calcoli in modo efficace Ω_4^{-1} . Cioè, assegnato un numero razionale $\frac{a}{b}$, per quale n si ha $\Omega_4(n) = \frac{a}{b}$? Equivalentemente, qual è l'indirizzo di $\frac{a}{b}$ sull'albero di Calkin - Wilf?

Si noti che il problema è sempre risolvibile in tempo finito con la forza bruta. E' sufficiente calcolare la sequenza $\frac{b(n)}{b(n+1)}$ fino a che si incontra $\frac{a}{b}$. Quello che si cerca è un algoritmo veloce. O almeno più veloce di quello banale.

Concludiamo, osservando che esiste almeno un altro albero dei razionali, notissimo, l'albero di Stern - Brocot. Chi vuole fare la sua conoscenza può consultare [1] e [2].

Riferimenti bibliografici

- [1] David Austin, Trees, Teeth, and Time: The mathematics of clock making, *Brocot illustrated*, American Mathematical Society, Feature Column, 2008.
- [2] Claudio Bonanno, Stefano Isola, Orderings of the rationals and dynamical systems, *arxiv.org/abs/0805.2178*, *Colloq. Math.*, **116** 2009, 165–189.
- [3] David M. Bradley, Counting the positive rationals: a brief survey, *arxiv.org/abs/math/0509025*, 1 september 2005.
- [4] Neil Calkin and Herbert S. Wilf, Recounting the Rationals *The American Mathematical Monthly*, **107**, 2000, pp. 360–363.
- [5] T. J. Heard, Counting the Rationals, *The Mathematical Gazette*, **60**, 1976, pp. 62–63.

- [6] Antti Karttunen, An excerpt from the Book III of The Harmony of the World by Johannes Kepler,
Kepler.
- [7] Sam Northshield, Sterns Diatomic Sequence $0, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, \dots$,
The American Mathematical Monthly, **117**, August - September 2010, 581–598.
- [8] Shen Yu-Ting, A Natural Enumeration of Non-Negative Rational Numbers—An Informal Discussion
The American Mathematical Monthly, **87**, 1980, pp. 25–29.