Pastorale Universitaria: Saperi ed Etica
Giovedì 27 gennaio 2000
L'Uomo e il sapere
L'etica delle logiche

Contributo di Umberto Cerruti
Università di Torino

"Narrano i cieli la gloria del Signore,
gli spazi annunziano l'opera delle sue mani.
Un giorno all'altro ne dà notizia,
una notte all'altra lo racconta,
senza discorsi e senza parole.
Non è voce che si possa udire."
(Salmo 19, 1-4)

Questi splendidi versi esprimono la meraviglia per la bellezza che ci circonda; come scrive il Papa "Le conoscenze fondamentali nascono dalla meraviglia". Si tratta inizialmente di una conoscenza essenzialmente contemplativa e poetica. L'inizio del Salmo 19 ci parla sì di una voce che narra, ma è una voce senza parole, addirittura inudibile.
La matematica mette l'uomo in grado di ascoltare questa voce silenziosa, che giunge a noi dagli abissi del cosmo, dallo scontrarsi apparentemente casuale della materia, dal brulicare incredibile della vita.

Il primo grado di conoscenza oggettiva e comunicabile è offerto dai numeri, dalla *misura.* Associando numeri alle nostre osservazioni possiamo parlare di giorni, distanze e pesi. La successione dei numeri naturali 1, 2, 3, … , così semplice e familiare, conduce spontaneamente ai numeri razionali: i loro rapporti. Con i numeri razionali possiamo svolgere compiti fondamentali come dividere equamente il cibo o un terreno.

L'attività di misurazione numerica del creato, per esempio l'osservazione dei rapporti tra le distanze dei corpi celesti, tra i loro periodi di rotazione, è di per sé affascinante e può riempire una vita. Pitagora osservava lo stesso cielo del salmista ma concludeva che "ogni cosa ha numero", e che dai rapporti tra questi numeri deriva l'inudibile armonia dell'universo. Fu proprio Pitagora a scoprire che i numeri razionali non sono sufficienti a misurare tutte le grandezze. La diagonale di un quadrato è incommensurabile con il suo lato. Spesso non si riflette sulle difficoltà generate da questo fatto inoppugnabile (un vero e proprio *scandalo*, una pietra di inciampo).

Disegniamo una retta r; fissate una origine O ed unità di misura U, si possono segnare su r tutti i punti di coordinate razionali. Se ora L è la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato U e riportiamo L sulla retta, ad L non corrisponde alcuno dei punti segnati! L non è misurabile!
La conclusione è che *mancano* dei numeri; i numeri razionali non sono sufficienti. Si deve riflettere sulla stranezza di questo fatto: i numeri razionali sono densi sulla retta; tra due razionali, per quanto vicini, ve ne sono infiniti altri.

Incontriamo qui una valenza etica fondamentale del sapere matematico: la scoperta dei limiti della conoscenza umana, che si presentano ogni volta che essa esce dal vago e dall'impreciso.

Oggi noi siamo in grado di aggiungere i numeri mancanti (i numeri irrazionali, come $\sqrt{2}$), ottenendo l'insieme dei numeri reali. Ma, come si legge in Qoelet 1,15:

"Ciò che è storto non si può raddrizzare,
né ciò che manca si può contare."

Questo fatto è estremamente importante, e merita attenzione.

Cantor, nel 1865, fondò la moderna aritmetica dell'infinito. Ci interessano qui due infiniti: il numerabile ed il continuo. Un insieme X è numerabile se i suoi elementi si possono elencare: è possibile cioè creare una lista dove le righe sono numerate 1,2,3,…, e in ogni riga, a fianco del numero naturale che la denota, appare un unico elemento di X. Ovviamente l'insieme dei numeri naturali è numerabile. Anche l'insieme dei numeri naturali quadrati è numerabile, e la lista appare così:

1 1
2 4
3 9
………..

Con un ingegnoso processo di elencazione Cantor ha dimostrato che l'insieme dei razionali è anch'esso numerabile. La sorpresa è che l'insieme dei numeri irrazionali, quelli che mancavano e che abbiamo aggiunto per ottenere i numeri reali, non è numerabile: esso ha la "cardinalità" del continuo. Non esiste nessuna lista che può contenere tutti i numeri irrazionali! La differenza tra l'infinito numerabile e quello continuo non è da poco. Per farsi un'idea si pensi che se si estrae a caso un numero dalla retta reale, la probabilità che esso sia razionale è nulla! Potete scommettere qualsiasi somma contro una lira, matematicamente certi di vincere, che il numero estratto sarà irrazionale! In termini matematici la misura dell'insieme dei razionali è nulla: per esprimere questo fatto si usa dire che "quasi tutti" i numeri reali sono irrazionali.

Trarremo da questo fatto alcune conseguenze di grande rilievo filosofico ed etico.

Dobbiamo avere un poco di pazienza; vogliamo dimostrare che l'insieme B di tutte le sequenze finite binarie (cioè formate da 0 ed 1) è numerabile. Lo proviamo elencandole. La cosa è molto semplice: elenchiamo prima le sequenze di lunghezza 1, poi quelle di lunghezza 2, e così via. Ci sono 2 sequenze di lunghezza 1: 0 ed 1; 4 di lunghezza 2: 00, 01, 10, 11; 8 di lunghezza 3…
La lista appare così:

1 0
2 1
3 00
4 01
5 10
6 11
7 000
8 001
9 010
…………..

Ora ogni algoritmo a noi noto è codificabile come un programma di computer. Un programma, visto nella memoria della macchina, non è altro che una sequenza finita di 0 ed 1 (compreso lo spazio dei dati). Dunque l'insieme di tutti i possibili algoritmi è rappresentato dall'insieme B ed è numerabile.
Un numero reale z è *computabile* se esiste un algoritmo che lo calcola; esiste cioè un algoritmo che, dato un naturale n, in un tempo finito produce la cifra n-esima dell'espressione decimale di z. Poiché, come abbiamo visto, l'insieme dei reali irrazionali non è numerabile ma continuo, quasi tutti i numeri reali non sono computabili!

Si noti che l'insieme dei reali è costruito con un procedimento di completamento, a partire dall'insieme dei numeri razionali, assolutamente preciso e rigoroso. Abbiamo davanti un mondo, allora, che globalmente ci è noto ma tale che quasi tutti gli individui che lo abitano sono non solo sconosciuti – cosa che non stupirebbe – ma *inconoscibili.*

Ad un secondo grado di conoscenza parliamo di leggi, ovvero – più in generale – di verità.

Per il seguito del discorso ci serve riconoscere il fatto che l'insieme F di tutte le frasi possibili in Italiano (o in una qualsiasi altra lingua) è numerabile. Si segue un metodo identico a quello visto sopra per l'insieme B delle sequenze binarie finite. Ogni testo in italiano ha una determinata lunghezza n, è formato cioè da n caratteri. Vogliamo elencare tutte le possibili frasi. Cominciamo con quelle di lunghezza 1: a, b, c, …, mettiamo poi quelle di lunghezza 2 (in ordine alfabetico) aa, ab, ac, …e così via. In questo modo si elenca tutto F. Quindi F è numerabile. Ogni possibile testo è compreso nel nostro elenco: la Divina Commedia, la Bibbia in tutte le sue versioni, tutte le possibili frasi sensate o insensate che sono state dette o che verranno mai dette. Ogni testo corrisponde in modo unico ad un intero naturale: la sua posizione nell'elenco.

Fissiamo ora il numero 3, e per ogni numero irrazionale dato h costruiamo la seguente verità (proposizione vera) : "h è maggiore di 3" se h è in effetti maggiore di 3, per esempio se h è pi greco; oppure "h è minore di 3" se h è invece minore di 3, per esempio se h è $\sqrt{2}$. Abbiamo ora tante verità quanti sono i numeri irrazionali, una quantità continua. Però per dire queste verità abbiamo a disposizione soltanto una quantità numerabile di espressioni: gli elementi di F. Dunque quasi tutte le verità che abbiamo ottenuto sono *ineffabili*: non possono essere dette. Si noti che non è un gioco di parole, non ci sono proprio abbastanza parole per dirle! Se si pensa poi che vi sono ben altre e assai più numerose verità di queste poche e particolari e minuscole che abbiamo costruito, si può concludere che le verità esprimibili dall'uomo a parole sono un nulla.

Ma abbiamo anche altri limiti. Vi sono verità esprimibili non dimostrabili.

Occorre precisare alcuni termini. Una teoria è formata da assiomi, regole di derivazione e deduzioni fatte a partire dagli assiomi utilizzando le regole. Diciamo che una teoria è *coerente* se non si può derivare in essa alcuna falsità, cioè se ogni deduzione è vera. Una teoria incoerente non serve a nulla perché da essa qualsiasi proposizione può essere derivata. Diciamo che una teoria è *completa* se ogni verità (esprimibile nell'ambito della teoria) è in essa derivabile, cioè ogni verità è dimostrabile.

Consideriamo la proposizione P = "questa proposizione non è dimostrabile". Se P è vera abbiamo una proposizione vera non dimostrabile e il nostro sistema è incompleto. Se P è falsa allora P è dimostrabile, dunque nel nostro sistema si deriva una falsità ed il sistema è incoerente. Siamo di fronte ad un aut aut: o la coerenza o la completezza, ma non entrambi. Poiché siamo convinti che i nostri ragionamenti sono corretti e che non proviamo assurdità, siamo obbligati a concedere che *vi sono verità esprimibili non dimostrabili*.

Possiamo cercare di illuderci pensando che il problema evidenziato riguardi solo il linguaggio naturale, che usare la proposizione P sia una specie di trucco sconveniente, ma non è così. Gödel ha provato che ogni teoria formale abbastanza potente da poter formulare in essa l'aritmetica se coerente è incompleta; il ragionamento è lo stesso che abbiamo fatto ma è stato reso formalmente preciso e rigoroso. Poiché, ovviamente, l'aritmetica è coerente, esistono verità aritmetiche che non potranno mai essere dimostrate! Per esempio la congettura di Goldbach: "Ogni numero pari maggiore di 2 è somma di 2 numeri primi" è stata verificata sperimentalmente in un enorme numero di casi ma nessuno riesce a dimostrala. Potrebbe essere una di queste verità. Supponiamo che lo sia.

Essa potrebbe eventualmente essere dimostrata in un sistema più ampio di quello dell'aritmetica. Però, se l'ampliamento è coerente deve essere incompleto, ed appaiono per forza altre verità indimostrabili. Poiché possiamo fare solo un numero finito di ampliamenti *vi saranno sempre verità esprimibili e indimostrabili*.

Soffermiamoci un attimo su quello che abbiamo visto: la matematica ci mostra che per l'uomo vi sono numeri inconoscibili, verità ineffabili e verità dicibili ma indimostrabili. Quali insegnamenti etici possiamo trarne? Almeno tre, uno per tutti e due in particolare per i credenti.

Primo: tutti dovrebbero essere più umili, abbandonare le manie di grandezza e riflettere sul fatto che non si potrà mai sapere tutto. Essere consci dell'incompletezza del nostro sistema di idee, qualsiasi esso sia, ci porta in modo naturale ad ascoltare con attenzione ogni persona che ci parla: potrebbe dirci una verità che non vediamo.

Secondo: chi ha la grazia di credere smetta di cercare dimostrazioni dell'esistenza di Dio! Sembra quasi empio tentare di sottomettere Dio al potere dimostrativo e cogente di intelletti tanto piccoli! Vogliamo conoscere il nostro Creatore, e non siamo in grado di conoscere nemmeno quelle semplici cose che abbiamo creato noi stessi… Parliamo di Dio e non sappiamo parlare di verità elementari che riguardano i numeri che usiamo ogni giorno! Dobbiamo lasciare che sia Dio a parlare di sé attraverso le Sacre Scritture.

Terzo: se noi crediamo, sappiamo che Dio è onnisciente e onnipotente. Dio conosce tutte queste verità, Dio è in grado di esprimerle! Lasciamoci colmare di meraviglia!

Signore, quanto sono grandi le tue azioni,
come sono profondi i tuoi pensieri!
L'uomo ignorante non se ne accorge.
Lo stupido non lo capisce.
(Salmo 92, 6-7)

Perché i miei pensieri non sono i vostri pensieri,
le vostre vie non sono le mie vie - oracolo del Signore.
(Isaia 55,8)

Il pensiero di Dio non è il nostro pensiero, le sue vie non sono le nostre. La matematica ci aiuta non certo a comprendere questo pensiero inaccessibile, ma a percepirne timidamente l'infinita profondità.

Non bisogna credere che la matematica serva solo a riconoscere le limitazioni del pensiero umano. Essa è estremamente potente e creativa, e questo ovviamente comporta responsabilità etiche indirette e dirette.

Il campo di applicazione della matematica si è enormemente ampliato con i progressi della tecnica, ben al di là della fisica. Moltissimi apparati tecnologici utilizzano – senza che nessuno lo sappia – qualche teoria matematica.
La TAC (Tomografia Assiale Computerizzata) si basa su sofisticati metodi analitici che permettono di ricostruire l'interno di una sezione del corpo conoscendo solo alcune densità trasversali.

La trasmissioni di enormi quantità di segnali su canali disturbati è possibile solo perché esiste una teoria algebrica assai avanzata che consente di correggere gli inevitabili errori; senza di essa non esisterebbero nemmeno i "banali" lettori di CD.
In biologia e neurologia sono sempre più importanti i modelli matematici per capire i complessi fenomeni che avvengono nel metabolismo, in un ambiente ecologico, nel sistema nervoso.
Potenti algoritmi combinatorici sono usati in genetica per accelerare la decifrazione del DNA.

In modo diretto – e ignoto a molti – la matematica si assume grandi responsabilità etiche attraverso la crittografia, l'intelligenza artificiale, e l'evoluzione di algoritmi – per fare alcuni esempi.

Apparentemente anche la matematica soggiace a quello che Aime chiamava, nel primo incontro, l'imperativo tecnico: "si può fare, dunque si deve fare".

I metodi crittografici moderni più efficaci si basano tutti sulla teoria dei numeri (considerata una volta la più innocua delle scienze) o su altre teorie matematiche. Mediante la crittografia a "chiave pubblica" si possono firmare messaggi ed autenticare documenti inviati sulla rete. E' possibile inviare messaggi che nessuno è in grado di decifrare, se non il destinatario. Questo è tanto pericoloso che gli USA considerano l'esportazione dei metodi crittografici sullo stesso piano di quella delle armi, vietandola nei casi dei metodi più potenti. La crittologia può essere usata da associazioni criminali o terroristiche, non solo per nascondere ciò che dicono ma anche per leggere i documenti riservati della polizia o del governo.

Per alcuni anni ho lavorato sulla logica fuzzy (sfumata), introdotta da Zadeh nel 1965. Questa logica è un modello del linguaggio naturale. Le proposizioni invece di assumere solo i valori di verità vero e falso (1 o 0) hanno un valore di verità che può essere un qualsiasi numero reale compreso tra 0 ed 1. Per esempio "x è grande", dove x varia in un certo insieme X, è rappresentata da una funzione f tra X e l'intervallo [0,1]. Modificazioni linguistiche come "x è molto grande" o "x è abbastanza grande" vengono rappresentate da operatori che agiscono su f: per esempio fare il quadrato di f o prendere la sua radice quadrata. Non avrei mai pensato, appena 15 anni fa, che la logica fuzzy utilizzata con le reti neurali (sistemi ibridi), avrebbe condotto alla creazione di macchine che possono sostituire l'uomo in compiti per nulla ripetitivi o meccanici, che venivano considerati possibili solo per noi. Le reti neurali sono in grado di apprendere – anche senza istruttore – e di riconoscere le forme. Alcune linee della metropolitana di Tokio sono pilotate da una rete neurale.

Esistono sistemi esperti per le diagnosi mediche, e psicologi virtuali.

Lo studio della *vita artificiale* ha condotto alla osservazione di mondi virtuali fatti di "creature" semplicissime e prive di intelligenza (nel senso usuale) sensibili solo ad un loro piccolissimo intorno che producono un comportamento globale complesso e dimostrato "indecidibile". Affiora in esse una forma primitiva ed essenziale di "libero arbitrio"?

Una tecnica moderna matematica, la evoluzione di algoritmi, porta il Darwinismo nell'informatica. Partendo da un brodo primordiale di algoritmi casuali, attraverso selezione e mutazione si possono produrre algoritmi efficaci, che noi stessi non sapremmo formulare. Quando il sistema che emerge dal processo evolutivo è una rete neurale, non siamo nemmeno in grado di capire *perché* funzioni così bene. La conoscenza – come nel nostro cervello – è *distribuita* nei pesi delle connessioni sinaptiche e non è direttamente esplicabile.

Tutto questo, ovviamente, pone seri problemi. Tra gli altri, se l'uomo sarà sempre più sostituito da macchine, ci sarà sempre meno lavoro, e la distribuzione della ricchezza e dei beni culturali assumerà ancora più importanza, anche nei felici paesi del "primo" mondo. La politica, come gestione della *polis* globale, viene spinta dalla scienza sempre di più in primo piano.

Infine – forse - la funzione etica fondamentale della logica rimane quella di essere giudice della coerenza delle nostre azioni con il sistema assiomatico della nostra fede.
Come osservava Pollano "la confusione del bene e del male rende impossibile conservare l'ordine morale dei singoli e delle comunità".

Nell'ultimo incontro Resegotti ha fatto notare con forza l'ingiustizia selvaggia e irrazionale dell'attuale sistema economico globale. Non possiamo accettare in modo interessato o anche solo acritico questo sistema e dichiararci seguaci di chi diceva: "da questo tutti sapranno che siete miei discepoli, se avrete amore gli uni per gli altri" (Giovanni 15,35).

Ovviamente questi non sono che esili cenni ad un insieme di vaste e profonde problematiche. Qui di seguito si può trovare una piccola bibliografia, brevemente commentata.

Anche se ritengo che l'esistenza di Dio non sia dimostrabile (come ovviamente mi sembra indimostrabile la sua non-esistenza) penso che – come l'arte, la letteratura e la filosofia – la scienza sia una strada maestra che indica con forza *la presenza* di Dio nell'universo. Si vedano (bisogna pur scegliere nell'immensa letteratura sull'argomento):

Stanley L. Jaki – La strada della scienza e le vie verso Dio – Jaca Book 1981. L'autore è un sacerdote benedettino con dottorati in teologia e in fisica. Ci offre un quarto di secolo di studi e di amore.

Paul Davies – La mente di Dio – Mondadori 1993. Grande divulgatore, il fisico Paul Davies ci spiega perché attraverso le sue ricerche è giunto a credere che l'universo è costruito con tale sorprendente ingegnosità da non potere essere considerato un fatto puro e semplice. Particolarmente affascinante il capitolo IV "Matematica e realtà", dove parla di Life, la creatura cellulare scoperta dal grande matematico J. H. Conway.

Come dice Reinhard Löw "il confronto tra fisica e teologia non è né un confronto fisico né un confronto teologico, ma un confronto filosofico". In questo libro l'autore affronta anche tematiche attuali legate alla fisica moderna:

Reinhard Löw – Le nuove prove che Dio esiste – Piemme 1996.

La vacuità di molte dimostrazioni è discussa, forse con eccesso di humour – in certi casi – dal matematico e collega Piergiorgio Odifreddi in:

Piergiorgio Odifreddi – Il Vangelo secondo la Scienza – Einaudi 1999.

Su fondamentali questioni filosofiche poste dalla matematica:

J. D. Barrow – Perché il mondo è matematico? – Lezioni Italiane Laterza 1992.

Enrico Giusti – Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici – Bollati Boringhieri 1999.

Sui numeri reali, l'infinito, l'innominabile, l'indimostrabile, l'indecidibile, Gödel, …, due libri splendidi:

Douglas R. Hofstadter – Gödel, Esher, Bach: un'Eterna Ghirlanda Brillante – Adelphi 1884.

Rudy Rucker – La mente e l'infinito – Muzzio 1991. Non solo i numeri reali ma anche quelli surreali di J. H. Conway.

Sulla bellezza della matematica:

Serge Lang – La bellezza della matematica – Bollati Boringhieri 1991. Argomenti matematici resi comprensibili a tutti con una tecnica perfettamente socratica.

David Blatner – Le gioie del π - Garzanti 1999. Le straordinarie trovate dell'ingegno umano per cercare di conoscere almeno qualcosa di un singolo numero (per altro inconoscibile all'uomo nella sua interezza).

Ancora due testi sui rapporti tra religione, scienza e teologia:

Carlo Maria Martini – Orizzonti e limiti della scienza – Cortina 1999. Decima cattedra dei non credenti. Incontro del cardinale con un cosmologo, un astrofisico, un astrobiologo, un biologo dell'evoluzione, un neurofisiologo, uno psicobiologo, un filosofo e un teologo.

Claude Allègre – Dio e l'impresa scientifica - Cortina 1999. Il millenario conflitto tra religione e scienza narrato dal geochimico Allègre, ministro della pubblica istruzione e ricerca nel governo Jospin.

Come il Beato Angelico esprime l'inesprimibile: un bellissimo saggio di teologia apofatica applicata all'ermeneutica dell'opera di un eccelso artista:

Georges Didi – Huberman, Beato Angelico, Figure del dissimile, Leonardo 1991.

Cito infine tre lavori che meravigliosamente fondono tra di loro racconto, filosofia e matematica:

Edwin A. Abbott – Flatlandia – Adelphi 1966. Il reverendo londinese Abbott visse tra il 1838 e il 1926. In questa favola ci narra, con logica precisa e tagliente, quali etiche sarebbero possibili in mondi a una o due dimensioni. E se l'universo ha più di tre dimensioni, non siamo anche noi un po' "piatti"? E se Dio fosse un punto?

Malba Tahan (pseudonimo di un matematico brasiliano) – L'uomo che sapeva contare – Salani 1996. Incontro pieno di poesia e tenerezza con il mondo islamico attraverso la matematica.

Jorge Luis Borges – La biblioteca di Babele – in Finzioni, Einaudi 1978. Ci sono *tutti* i libri che sono stati e che saranno scritti; ma come trovarli?